حل الوظائف

الرياضيات 3

حل وظيفة المحاضرة الأولى :

أوجد معادلات المستقيم المماسي للمنحني :

$$\vec{r}_{(t)} = \begin{cases} \vec{x}_{(t)} = t.\vec{i} \\ \vec{y}_{(t)} = e^t.\vec{j} \\ \vec{z}_{(t)} = (t^2+1).\vec{k} \end{cases}$$

وذلك بعد التأكد من صقالته عند النقطة **t=0**

بدلالة الوسيط   نلاحظ ان المعادلات الممثلة لهذا المنحني بدلالة الوسيط **t** هي عبارة عن مجموعة من التوابع الصحيحة والاسية ونعلم ان التابع الصحيح و الاسي (اسه موجب) معرف و مستمر عند قيم **t** اما المشتقات فهي :

$$\dot{\vec{r}}_{(t)} = \begin{cases} \dot{\vec{x}}_{(t)} = 1.\vec{i} \\ \dot{\vec{y}}_{(t)} = e^t.\vec{j} \\ \dot{\vec{z}}_{(t)} = 2t.\vec{k} \end{cases}$$

وهي أيضا مشتقاتها موجودة , مشتقاتها موجودة أيا كانت قيمة الوسيط **t**

فالشرط الأول محقق ونلاحظ انه لا يوجد قيمة ل **t**تعدم المشتقات الثلاثة معا اذا

فالشرط الثاني محقق واذا اخذنا قيمتين مختلفتين ل **t**و طابقنا بين $\vec{z}_{(t1)}$ و $\vec{z}_{(t2)}$،

يكون :

$$2t_1 \neq 2t_2 \quad \leftrightarrow \quad t_1 \neq t_2$$

وكذلك بالنسبة ل **x,y**

$$t_1 \neq t_2$$
$$e^{t_1} \neq e^{t_2}$$

اذا الشروط اللازم ليكون المنحني صقيل محقق

والان لنوجد معادلات المستقيم المماسي من النقطة **t=0** نعوض في كل من $\vec{r}_{(t)}$ ، $\vec{r}'_{(t)}$ نجد :

$$t=0 \rightarrow \overrightarrow{r_{(0)}} = \begin{cases} \overrightarrow{x_{(0)}} = 0\vec{i} \\ \overrightarrow{y_{(0)}} = e^0 = 1\vec{j} \\ \overrightarrow{z_{(0)}} = 1\vec{k} \end{cases} \rightarrow r'_{(0)} = \begin{cases} x'_{(0)} = 1 \\ y'_{(0)} = 1 \\ z'_{(0)} = 0 \end{cases}$$

تعطى معادلات المستقيم في الفراغ بالشكل وسيطياً :

$$\frac{x-x_0}{x'_{(t)}} = \frac{y-y_0}{y'_{(t)}} = \frac{z-z_0}{z'_{(t)}} = t$$

$$z - z_{(0)} = t.z'_{(t)}$$

نعوض:

$$z-1=t.0 \rightarrow z = 1$$

$$\frac{x-x_0}{x'_{(t)}} = t \rightarrow x - 0 = 1t \rightarrow x = t \qquad \dots.1$$

$$\frac{y-y_0}{y'_{(t)}} = t \rightarrow \frac{y-1}{1} = t \rightarrow y = 1 + t \qquad \dots.2$$

نعوض 1في 2 فيكون :

y=1+x

اذا معادلات المستقيم عبارة عن معادلتين هما:

y=1+x , z=1

2-اوجد معادلات المستقيم المماسي للمنحني:

$$r=\begin{cases} x = t^4 \\ y = b^2 \\ z = \cos(t) \end{cases}$$

وذلك عند نقطة منه $p(x_0,y_0,z_0)$

الحل:

إن كل مشتقات مركبات المستقيم ومركباته معرفة ومستمرة وموجودة أيا كانت قيمة الوسيط **t**

وأيا كانت النقطة حيث أن كلا منهم عبارة عن إما توابع صحيحة أو توابع مثلثية و إن المشتقات الجزئية

لا تنعدم أبدا باستثناء نقطة واحدة هي عندما تكون $t = 0$

عندها إذا المنحني صقيل أيا كانت قيمة **t** باستثناء $t = 0$ وتعطى المعادلات

المستقيم المماس للمنحني في النقطة $p(x_0, y_0, z_0)$ بالشكل:

$$\frac{x - x_0}{x'(t)} = \frac{y - y_0}{y'(t)} = \frac{z - z_0}{z'(t)}$$

$$r'^{(t)} = \begin{cases} x = 4t^3 \\ y = 2t \\ z = -sin(t) \end{cases}$$

لنوجد معادلات المستقيم مثلا عند **t=1** أي عند أي قيمة ما عدا **t=0**

$$r(t = 1) = \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = cos(1) \end{cases}$$

$$r'_{(t=1)} = \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \\ z = -sin(1) \end{cases}$$

اذا معادلات المستقيم المماس هي:

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-cos(1)}{-sin(1)}$$

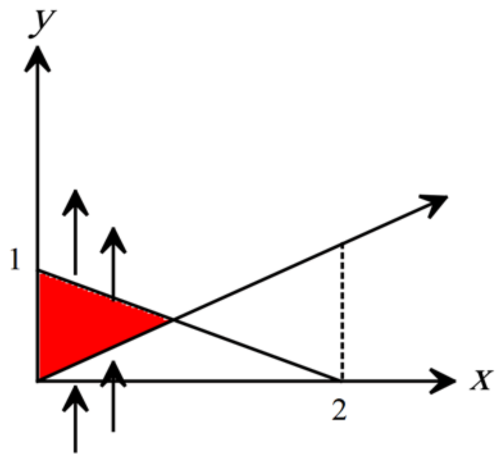
وهو المطلوب.

حل وظيفة المحاضرة الثانية:

احسب قيمة التكامل الثنائي التالي:

$$I=\iint_D (2-x+2y)dydx$$

$$D=\begin{cases} x=2y \\ x+2y=2 \\ x=0 \end{cases}$$



لنوجد نقاط تقاطع المستقيمين: $y=\frac{x}{2}$, $y=\frac{2-x}{2}$

$$2y+2y=2$$

$$2y=1 \leftrightarrow y=\frac{1}{2} \leftrightarrow x=1$$

نثبت الـx بين 0 و 1 ونجعل y تتغير بين : $y=\frac{x}{2}$, $y=\frac{2-x}{2}$

$$I=\int_0^1 \left[\int_{y=\frac{x}{2}}^{y=\frac{2-x}{2}} 2-x-2y\,dy\right]dx$$

$$I = \int_0^1 [2y - xy - y^2]_{\frac{x}{2}}^{\left(1-\frac{x}{2}\right)} dy$$

$$I = \int_0^1 2 - x - x + \frac{x^2}{2} - 1 + x - \frac{x^2}{4} - (x - x^2 - \frac{x^2}{4}) dx$$

$$I = \int_0^1 1 - 2x + x^2 dx = \left[x - x^2 + \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 1 - 1 + \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

حل وظيفة المحاضرة الخامسة :

أوجد قيمة التكاملات التالية:

$$I = \iint_D \frac{dxdy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{4}}}$$

$$D \equiv \{x^2 + y^2 \leq a^2$$

الحل:

لننتقل إلى الإحداثيات القطبية فيكون التكامل:

$$I = \iint \frac{rd(r)d(\theta)}{r^{\frac{3}{2}}}$$

وإن $x^2 + y^2 \leq a^2$ وهي عبارة عن مجموعة من النقاط داخل الدائرة نصف قطرها **a** ومركزها **(0,0)** لذلك تكون $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ونصف القطر بين أصغر قيمة له و هي الصفر إلى أكبر قيمة له وهي الـ**a**

$$I = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^a \frac{rd(r)}{r^{\frac{3}{2}}}\right] d(\theta)$$

$$= 2\int_0^{2\pi} \left[r^{\frac{1}{2}}\right]_0^a d(\theta) = 2\sqrt{a}\int_0^{2\pi} d(\theta) = 4\pi\sqrt{a}$$

تمرين (2)

$$2)\ \iint_D \frac{xy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}} d(x)d(y)$$

حيث أن **D** هي الربع الموجب من المستوي **XOY**

الحل:

ننتقل إلى الاحداثيات القطبية ونلاحظ أن $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ لأنها تقع في الربع الأول من المستوي **XOY** الموجب أما بالنسبة ل **r** فنجد أنها تبدأ بالقيمة صفر و تنتهي في اللانهاية لذلك فإن هذا التكامل يعتبر تكامل شاذ من النوع الثاني نعوض في التكامل فنجد:

$$I = \lim_{\delta N \to +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{\delta N} \frac{r^3 COS(\theta) Sin(\theta)}{(1+r^2)^{\frac{5}{2}}} d(r) \right] d(\theta)$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} COS(\theta) Sin(\theta) d(\theta) \lim_{\delta N \to +\infty} \int_0^{\delta N} \frac{r^3}{(1+r^2)^{\frac{5}{2}}} d(r)$$

$$I_1 = \lim_{\delta N \to +\infty} \int_0^{\delta N} \frac{r^3}{(1+r^2)^{\frac{5}{2}}} d(r) = \lim_{\delta N \to +\infty} \int_0^{\delta N} \frac{r(r^2+1-1)}{(1+r^2)^{\frac{5}{2}}} d(r)$$

$$I_1 = \lim_{\delta N \to +\infty} \int_0^{\delta N} \frac{r(r^2+1)-r}{(1+r^2)^{\frac{5}{2}}} d(r)$$

$$= \lim_{\delta N \to +\infty} \int_0^{\delta N} \frac{r(r^2+1)}{(1+r^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{r}{(1+r^2)^{\frac{5}{2}}} d(r)$$

$$I_1 = \lim_{\delta N \to +\infty} \int_0^{\delta N} \frac{r}{(1+r^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{r}{(1+r^2)^{\frac{5}{2}}} d(r)$$

$$I_1=\frac{1}{2}\lim_{\delta N\to+\infty}\int_0^{\delta N}\frac{2r}{(1+r^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{2r}{(1+r^2)^{\frac{5}{2}}}d(r)$$

$$I_1=\frac{1}{2}\lim_{\delta N\to+\infty}\left[-2(1+r^2)^{\frac{-1}{2}}+\frac{2}{3}(1+r^2)^{\frac{-3}{2}}\right]_0^{\delta N}$$

$$I_1=\lim_{\delta N\to+\infty}\left(-(1+\delta N^2)^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}(1+\delta N^2)^{-\frac{3}{2}}\right)-(-1+\frac{1}{3})$$

$$I_1=\frac{2}{3}-(0)=\frac{2}{3}$$

$$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}COS(\theta)Sin(\theta)d(\theta)=\frac{1}{2}[-COS^2(\theta)]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}(0+1)=\frac{1}{2}$$

$$I=I_1\times I_2=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

أوجد قيمة التكامل الآتي :

$$I=\iint_D\frac{y}{x^2}dx\,dy$$

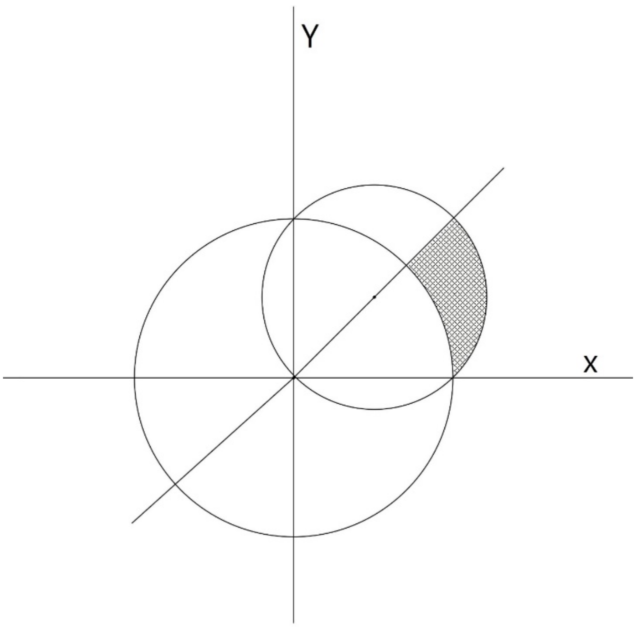
حيث D هي المنطقة الكائنة :

في الربع الموجب للمستوي الإحداثي

خارج الدائرة $x^2+y^2=4$

داخل الدائرة $(x-1)^2+(y-1)^2=2$

أسفل المستقيم $y=x$



الحل :

إن المنطقة D موضحة بالشكل

الجانبي وكما نلاحظ إن المنطقة

D هي تقاطع دائرتين مع المستقيم المنصف لذا من الصعب حلها ديكارتيا فنلجأ عندئذ للإحداثيات القطبية

و ذلك يتم بالاستبدال التالي :

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

لنعوض في التكامل المعطى بنص السؤال

مع الانتباه لليعقوبي r ووضعه بالتكامل

تمرين الثالث:

$$I = \iint \frac{r\sin\theta}{r^2\cos^2\theta}\, r dr\, d\theta$$

لنوجد حدود التكامل:

إن الزاوية □ ((الزاوية المحصورة بين المحور ox الموجب و المستقيم $y = x$)) تتراوح بين ال 0 و $\frac{\pi}{4}$ أي

$$\frac{\pi}{4} \geq \theta \geq 0$$

و نصف القطر r محصور بين الدائرتين $x^2 + y^2 = 4$ و

$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ لنوجد معادلة هاتين الدائرتين قطبيا و ذلك بالقيام الاستبدال السابق :

الدائرة الأولى: $r = 2$ $\quad r^2 = 4$

الدائرة الثانية: $(r\cos\theta - 1)^2 + (r\sin\theta - 1)^2 = 2$

$$r^2\cos^2\theta - 2r\cos\theta + 1 + r^2\sin^2\theta - 2r\sin\theta + 1 = 2$$

$$r^2 - 2r(\cos\theta + \sin\theta) = 0$$

$$r\{r - 2(\cos\theta + \sin\theta)\} = 0$$

إما $r = 0$ (مرفوض خارج نطاق التكامل)

أو $r - 2(\cos\theta + \sin\theta) = 0$

$$r = 2(\cos\theta + \sin\theta)$$

لنعوض في التكامل :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_2^{2(\cos\theta+\sin\theta)} \frac{r^2 \sin\theta}{r^2 \cos^2\theta}\, dr\, d\theta$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} \int_2^{2+(\cos\theta+\sin\theta)} dr\, d\theta$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} [r]_2^{2(\cos\theta+\sin\theta)}\, d\theta$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} [2(\cos\theta + \sin\theta) - 2]\, d\theta$$

$$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta - \sin\theta}{\cos^2\theta}\right) d\theta$$

$$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\cos\theta\sin\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{-\sin\theta}{\cos^2\theta}\right) d\theta$$

$$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\, d\theta$$

$$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan\theta + \frac{1}{\cos^2\theta} - 1 - \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\, d\theta$$

$$I = 2\left[-\ln(\cos\theta) + \tan\theta - \theta + \frac{-1}{\cos\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$I = 2\left(-\ln\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 - \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\sqrt{2}}\right) - 2(-\ln 1 + 0 - 0 - 1)$$

I =0.29

التمرين الرابع:

$$I = \iint \frac{xy}{(x^2 + y^2 + a^2)^{\frac{5}{2}}} dxdy$$

$$D = y > 0$$

الحل:

$$I = lim_{\delta n\to\infty} \int_0^{\pi}\int_0^{\delta n} \frac{r^3.\cos\theta.\sin\theta dr}{(r^2 + a^2)^{\frac{5}{2}}} d\theta$$

$$I = \int_0^{\pi} \cos\theta.\sin\theta d\theta.lim_{\delta n\to\infty} \int_0^{\delta n} \frac{r(r^2 + a^2)}{(r^2 + a^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{a^2 r}{(r^2 + a^2)^{\frac{5}{2}}} dr$$

$$I = \int_0^{\pi} \cos\theta.\sin\theta d\theta lim_{\delta n\to\infty} \left[\frac{2a^2}{3(r^2 + a^2)^{\left(\frac{3}{2}\right)}} - \frac{2}{\sqrt{r^2 + a}}\right]_0^{\delta n}$$

$$I = -\frac{1}{2}[\cos^2\theta]_0^{\pi}\ lim_{\delta n\to\infty} \left(\frac{2a^2}{3(\delta n^2 + a^2)^{\left(\frac{3}{2}\right)}} - \frac{2}{\sqrt{\delta n^2 + a}} + \frac{2}{a} - 2a^2/3a\sqrt{a}\right)$$

$$I = (1 - 1)\left(\frac{1}{a} - \frac{\sqrt{a}}{3}\right) = 0$$

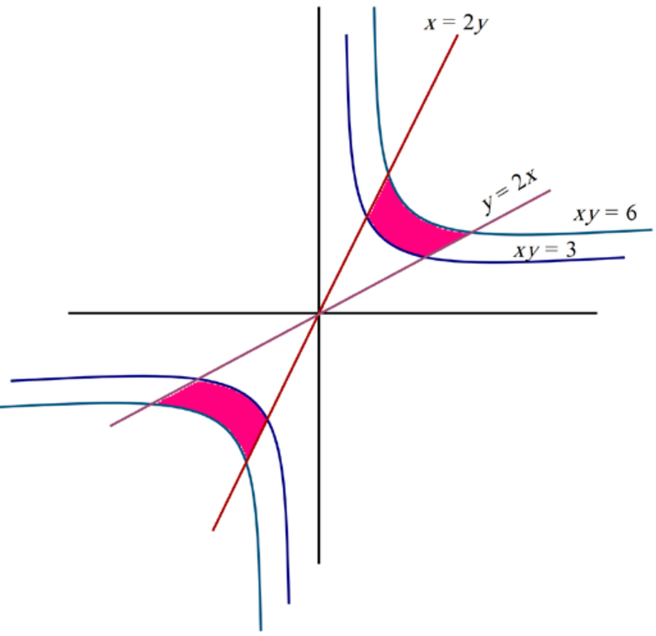
حل وظيفة المحاضرة السابعة:

احسب المساحة المحصورة بين المنحنيات التالية:

$$D=\begin{cases} x.y=6 \\ \frac{x}{y}=\frac{1}{2}\Rightarrow y=2x \\ x.y=3 \\ \frac{x}{y}=2\Rightarrow x=2y \end{cases}$$

إن كل من المعادلتين $x.y=6$, $x.y=3$ تمثلان معادلتان لقطع زائد اذا:

لنحسب مساحة المنحني المطلوب :



الربع الأول،وبعد ذلك نضربها بـ 2 لأن المنحني متناظر

إن المنطقة المحاطة بهذه المنحنيات ليست بسيطة

لنقسم المنطقة إلى ثلاثة أقسام بحيث تصبح كل منطقة بسيطة

لنوجد نقطة تقاطع المستقيم $y=2x$ مع كل من القطعين

$$x.y=6\,,y=2x\Rightarrow 2x^2=6$$
$$\Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$$

$$x_1=\sqrt{3}$$

$$x.y=3\,,y=2x\Rightarrow x_2=\sqrt{\frac{3}{2}}$$

إذا نثبت الـ x بين $x_1=\sqrt{3}\,,x_2=\sqrt{\frac{3}{2}}$ وتتغير الـ y بين منحني الدخول $y=\frac{3}{x}$ ومنحني الخروج $y=2x$

$$I_1 = \int_{\sqrt{\frac{3}{2}}}^{\sqrt{3}} \int_{y=\frac{3}{x}}^{y=2x} dy\, dx$$

$$I_1 = \int_{\sqrt{\frac{3}{2}}}^{\sqrt{3}} 2x - \frac{3}{x} dx$$

$$I_1 = [x^2 - 3\ln x]_{\sqrt{\frac{3}{2}}}^{\sqrt{3}} = 3 - 3\ln\sqrt{3} - \frac{3}{2} + 3\ln\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$I_1 = \frac{3}{2} + 3\ln\sqrt{\frac{3}{2\times 3}} = \frac{3}{2} + 3\ln\sqrt{2}$$

لنحسب المساحة الثانية و نوجد نقط تقاطع المستقيم $y = 2x\,, x.y = 3$ وقد تم إيجاد نقطة تقاطع المستقيم

$x.y = 3$ مع $y = \frac{x}{2}$

$x^2 = 6 \to x = \sqrt{6}$

اذا نثبت ال x بين $2\sqrt{3}$ و $\sqrt{3}$ و تتغير ال y بين $x.y = 3$ ومنحني الخروج $y = \frac{6}{x}$ نعوض :

$$I_2 = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{6}} \int_{y=\frac{3}{x}}^{y=\frac{6}{x}} dy\, dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{6}} \left(\frac{6}{x} - \frac{3}{x}\right) dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{6}} \frac{3}{x}\, dx$$

$$I_2 = [3\ln(x)]_{\sqrt{3}}^{\sqrt{6}} = 3\ln\sqrt{6} - 3\ln\sqrt{3} = 3\ln\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = 3\ln\sqrt{2}$$

3− لنوجد المساحة الثالثة و نوجد نقط التقاطع

$x.y = 3$ مع $y = \frac{x}{2}$

وقد تم إيجادها ونقطة تقاطع المنحني

$$x.y=6 \quad \text{مع} \quad y=\frac{x}{2}$$

نعوض

$$\frac{x^2}{2}=6 \rightarrow x^2=12 \rightarrow x=2\sqrt{3}$$

$$I_3=\int_{\sqrt{6}}^{2\sqrt{3}}\int_{y=\frac{x}{2}}^{y=\frac{6}{x}} dy\,dx=\int_{\sqrt{6}}^{2\sqrt{3}}\left(\frac{6}{x}-\frac{x}{2}\right)dx$$

$$I_3=\left[6\ln(x)-\frac{x^2}{4}\right]_{\sqrt{6}}^{2\sqrt{3}}=6\ln 2\sqrt{3}-\frac{12}{4}-6\ln\sqrt{6}+\frac{6}{4}$$

$$I_3=6\ln\sqrt{2}-\frac{3}{2}\leftrightarrow 6\ln\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}}-6=6ln\sqrt{2}-6$$

لنوجد التكامل الكلي

$$I=I_1+I_2+I_3$$

$$I=\frac{3}{2}-3ln\sqrt{2}+3ln\sqrt{2}+6ln\sqrt{2}-\frac{3}{2}$$

$$I=6ln\sqrt{2}=3ln2$$

I للجزئين هي

$$I_{total}=2I=6ln\sqrt{2}$$

طريقة ثانية:

لنفرض متحولان جديدان وهما:

$$\mathrm{v}=\mathrm{xy}$$

$$\mathrm{u}=\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{y}}$$

$$\mathrm{x}=\frac{\mathrm{v}}{\mathrm{y}}\rightarrow \mathrm{u}=\frac{\mathrm{v}}{\mathrm{y}^2}\rightarrow \mathrm{y}=\pm\sqrt{\frac{\mathrm{v}}{\mathrm{u}}}$$

$$\mathrm{y}=\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{u}}\rightarrow \mathrm{v}=\frac{\mathrm{x}^2}{\mathrm{u}}\rightarrow \mathrm{x}=\pm\sqrt{\mathrm{uv}}$$

نأخذ الجذور الموجبة و من ثم نضرب الجواب النهائي ب 2 لنحصل على التكامل المطلوب:

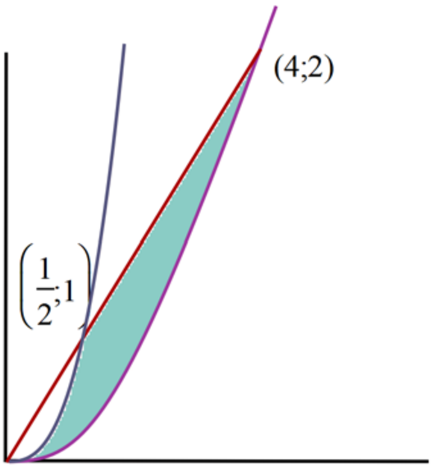
لنوجد المحدد اليعقوبي:

$$J=\begin{vmatrix}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}}\\ -\frac{1}{2u}\sqrt{\frac{v}{u}} & \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{uv}}\end{vmatrix}=\frac{1}{4}\frac{1}{u}+\frac{1}{4}\frac{1}{u}=\frac{1}{2u}$$

$$I_1=\int_3^6\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{1}{2u}d(u)d(v)=\frac{1}{2}[\ln(u)]_{\frac{1}{2}}^{2}\int_3^6 d(v)=\frac{1}{2}\left(\ln(2)-\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right)[v]_3^6=\frac{1}{2}2\ln(2)(6-3)=3\ln(2)$$

$$I=2I_1=6\ln(2)$$

التمرين الخامس:



$$I=\iint_D dx\,dy$$

$$D=\begin{cases}y=4x^2\\ y=2x\\ y=x^2\end{cases}$$

الحل

ان المساحة المكامل عليها ليست بسيطة لذلك نقسم المساحة المطلوبة الى قسمين و نقوم بتثبيت ال y وتغير ال x

1-لنوجد المساحة الاولى ولذلك لنثبت ال y بين $y=0\,,y=1$

حيث نقطة تقاطع القطع مع المستقيم

$$y=2x\,,y=4x^2$$

$$2x = 4x^2 \leftrightarrow x = 0$$
$$x = \frac{1}{x} \rightarrow y = 1$$

ونغيرال **y** بين المنحني $x = \frac{\sqrt{y}}{2}$ والمستقيم $x = \sqrt{y}$

$$I = \int_0^1 \int_{x=\frac{\sqrt{y}}{2}}^{x=\sqrt{y}} dxdy = \int_0^1 \sqrt{y} - \frac{\sqrt{y}}{2} dy = \frac{1}{3}$$

لنوجد المساحة الثانية لذلك نثبت ال y بين الواحد والأربعة ونغير ال **x** بين المستقيم $x = \frac{y}{2}$

و $x = \sqrt{y}$

$$I_2 = \int_1^4 \int_{x=\frac{y}{2}}^{x=\sqrt{y}} dxdy = \int_1^4 \sqrt{y} - \frac{2}{y} dy$$

$$I_2 = \left[2(y)^{\frac{3}{2}} - 2ln(y)\right]_1^4 = \frac{16}{3} - 2ln(4) - \frac{1}{3} + 2ln(1) = \frac{15}{3} - 2ln(4)$$

$$I_{tot} = I_1 + I_2 = \frac{16}{3} - 2ln(4)$$

التمرين الثالث:

$$I = \iint_D e^{\frac{x+y}{x-y}} dxdy$$

$$D = \begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 2 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

الحل:

لنفرض أن $u = x + y$ $v = x - y$ من المعادلة الأولى وبالمطابقة مع مساحة التكامل نجد أن

$$1 \le u \le 2$$

لنوجد حدود لـ v :
$$u + v = 2x \leftrightarrow x = \frac{u+v}{2} = 0 \leftrightarrow u = -v$$
$$u - v = 2y \leftrightarrow y = \frac{u-v}{2} = 0 \leftrightarrow u = v$$

لنوجد الآن المحدد اليعقوبي:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{dx}{du} & \frac{dx}{dv} \\ \frac{dy}{du} & \frac{dy}{dv} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{2}{4}$$

$$J = -\frac{1}{2} \Rightarrow |J| = \frac{1}{2}$$

لنعوض الآن في التكامل:

$$I = \frac{1}{2}\int_1^2 \left[\int_{u=-v}^{u=v} e^{\frac{u}{v}} d(u)\right] d(v) = \frac{1}{2}\int_1^2 \left[v.e^{\frac{u}{v}}\right]_{-v}^{v} d(v)$$
$$I = \frac{1}{2}\int_1^2 v.e - v.e^{-1}\, d(v) = \frac{1}{2}(e - e^{-1})\int_1^2 v d(v)$$
$$I = \frac{1}{2}\frac{e^2 - 1}{e}\left[\frac{v^2}{2}\right]_1^2 = \left(\frac{e^2-1}{2e}\right)\left(2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}\left(\frac{e^2-1}{e}\right)$$

4- $I = \iint x^2\, y^2 d(x) d(y)$

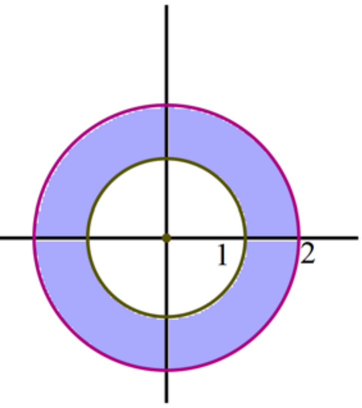
$$D \equiv 1 \le x^2 + y^2 \le 4$$

الحل:

لننتقل إلى الاحداثيات القطبية ; نعلم أنّ:

$$x = r.\cos(\theta) \Rightarrow x^2 = r^2.\cos^2(\theta)$$
$$y = r.\sin(\theta) \Rightarrow y^2 = r^2.\sin^2(\theta)$$
$$x^2.y^2 = r^4.\cos^2(\theta).\sin^2(\theta)$$
$$dx\,dy = r dr d\theta$$

$$I = \iint r^5 . cos^2(\theta) . sin^2(\theta)$$



لنوجد حدود التكامل:

حسب الرسم : $0 \leq \theta \leq 2\pi$

لإيجاد حدود r نأخذ الطرف الأيسر من المتراجحة:

$$1 \leq x^2 + y^2 \Rightarrow 1 \leq r^2$$

وهذه المتراجحة تعني بأننا نريد جميع النقاط الواقعة خارج دائرة نصف قطرها 1

ومركزها مبدأ الإحداثيات

أي أن الحد الأول من حدود r هو الواحد.

لنأخذ الطرف الآخر من المتراجحة: $x^2 + y^2 \leq 4 \Rightarrow r^2 \leq 4$

وهذه المتراجحة تعني بأننا نريد مجموعة نقاط الدائرة المركزية التي نصف قطرها (2).

وحسب الرسم نجد أن: $1 \leq r \leq 2$

$$I = \int_0^{2\pi} cos^2(\theta) . sin^2\,(\theta) d(\theta) \int_1^2 r^5 d(2)$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(1 - sin^2(\theta)\right) . sin^2(\theta) d(\theta) \left[\frac{r^6}{6}\right]_1^2$$

$$= \int_0^{2\pi} sin^2(\theta) - sin^4(\theta) d(\theta) . \left[\frac{64}{6} - \frac{1}{6}\right]$$

نعلم أنَّ:

$$\int_0^{2\pi} \sin^4(\theta)\,.\,d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(\theta)\,.\,d\theta$$

$$4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(\theta)\,.\,d\theta = 4 \times \frac{\pi}{2} \frac{(4-1)!!}{4!!} = 2\pi \times \frac{3 \times 1}{4 \times 2} = \frac{3\pi}{4}$$

$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(\theta)\,.d\theta = 4\times\frac{\pi}{2}\times\frac{1}{2} = \pi$$

$$I = \left(\pi - \frac{3\pi}{4} + \frac{63}{6}\right) = \left(\frac{\pi}{4} + \frac{63}{6}\right)$$

$$I = \iint_D \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,.dx.dy$$

$$D \equiv \begin{cases} x^2+y^2 = e \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}$$

الحل:

لنعوض بالإحداثيات القطبية فيكون:

$$1 \le r \le \sqrt{e}$$

$$0 \le \theta \le 2\pi$$

$$I = \iint_D \frac{\ln(r^2)}{r^2}.r.dr.d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_1^{\sqrt{e}} \frac{2}{r}.\ln r^2.dr$$

$$= \frac{1}{2}(2\pi)\left[\frac{\ln^2 r^2}{2}\right]_1^{\sqrt{e}} = \frac{\pi}{2}[\ln^2(e) - 0]$$

$$I = \frac{\pi}{2}.\ln^2 e = \frac{\pi}{2}$$

تذكرة: نعلم أنَّ:

$$\ln\left(\text{عدد}\right)^n = n.\ln(\text{العدد})$$

$$\ln(e) = 1$$

ليكن : $\vec{f} = (x + cy + az)\vec{i} + (x + y2 \ + bz)\vec{j} + \left(cy + z^2 \right)\vec{k}$

أوجد كمونه العددي U ثم احسب تفرق التابع الشعاعي الناتج $\vec{f}$

الحل :

معرف دوما , لأن مركباته كثيرات حدود , ويجب أن يحقق $\vec{\nabla} \wedge \vec{f} = \vec{0}$

$$\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x + cy + \alpha z & x + y^2 + bz & cy + z^2 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

$$(c - b)I - (0 - a)J + (1 - c)K = \vec{0} \Rightarrow \ c = b, a = 0, c = 1$$

$$\vec{f} = (\mathrm{x} + \mathrm{y})\mathrm{I} + (\mathrm{x} + \mathrm{y}^2 + z)J + (y + z^2 \ )K$$

بفرض U هو االكمون العددي للشعاع الكموني $\vec{f}$ فإن

$$\vec{f} = \nabla\vec{U} \ ; \vec{f} = \frac{\partial U}{\partial x} \ \hat{\imath} + \frac{\partial U}{\partial y} \ \hat{\jmath} + \frac{\partial U}{\partial z} \ \hat{k} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = x + y \Rightarrow U = \frac{x^2}{2} + yx + \varphi_1(y, z)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x + y^2 + z \Rightarrow U = xy + \frac{y^3}{3} + zy + \varphi_2(x, z)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = x + y^2 \Rightarrow U = yz + \frac{z^3}{3} + \varphi_3(x, y)$$

$$\Rightarrow U = \frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \frac{z^3}{3} + xy + zy + c$$

$$\vec{\nabla}.\vec{f} = \nabla^2 U; \quad \vec{\nabla}.\vec{f} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_x}{\partial y} + \frac{\partial f_x}{\partial z} = 1 + 2y + 2z$$

مثال 1:

برهن أن : $\vec{\nabla}.\left(\frac{r}{r^3}\right) = 0$ و $r \neq 0$

$$\vec{\nabla}.\left(\frac{1}{r^3}.\vec{r}\right) = \left(\vec{\nabla}.\frac{1}{r^3}\right).\vec{r} + \frac{1}{r^3}.(\vec{\nabla}.\vec{r}) = -\frac{3}{r^4}.\hat{r}.\vec{r} + \frac{3}{r^3} = \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^3} = 0 \quad , \hat{r}.\vec{r} = r$$

$\frac{\vec{r}}{r^3}$ شعاع لولبي في أي نطاق لا يشمل المبدأ

مثال 2

مثال: اذا كان: $\vec{F} = (\hat{\imath} \cdot \vec{r})\vec{r}$

1- $\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{F}\right)$ 2 - $\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{F}\right)$

1- الحل: $\vec{\imath} \cdot \hat{r} = (1,0,0)(x,y,z) = \mathbf{x} \Rightarrow$

$\vec{F} = X \cdot \vec{r} = x^2 \cdot \hat{\imath} +$

$xy \cdot \hat{\jmath} + xz \cdot \hat{k}$

2- الحل : $\vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla} \wedge \vec{F}\right)$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & xy & xz \end{vmatrix} = 0\hat{\imath} - z\hat{\jmath} + y\hat{k} \quad \Rightarrow$$

$$\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{F}\right) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & -z & y \end{vmatrix}$$

$$= (1+1)\hat{\imath} - (0-0)\hat{\jmath} + (0-0)\hat{k} \quad \Rightarrow$$

$$\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{F}\right) = 2\hat{\imath}$$

حل وظائف التكامل الثلاثي:

$I = \int_\Gamma (x^2+y^2)dl$ على Γ $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

$$x = 5cost \qquad y = 5sint \qquad z = \sqrt{11}t$$

$$dx = -5sintdt \qquad dy = 5costdt \qquad dz = \sqrt{11}dt$$

الحل :

$$dl = \sqrt{x'^2_t + y'^2_t + z'^2_t}dt$$

نعوض :

$$dl = \sqrt{25sin^2t + 25cos^2t + 11}$$

$$dl = \sqrt{25+11} = \sqrt{36} = 6$$

نعوض في التكامل المعطى :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (25sin^2t + 25cos^2t)6dt$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 25.6dt = [150t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 75\pi$$

13) $I = \int_\Gamma \frac{y}{x} dl$

حيث Γ هو الجزء من القطع المكافئ المعطى بالمعادلة $2y = x^2$ والذي يصل بين النقطتين $A\left(1, \frac{1}{2}\right)$, $B(2,2)$

$$dl = \sqrt{x'^2_t + y'^2_t}dt \quad = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

$$=\frac{1}{dt}\sqrt{dx^2+dy^2}dt=\sqrt{dx^2+dy^2}=dl\ (*)$$

نعوض في $y=\frac{x^2}{2}\Rightarrow dy=xdx\ (*)$

$$dl=\sqrt{dx^2+(xdx)^2}=dx\sqrt{1+x^2}$$

$$\frac{y}{x}=\frac{x^2}{2}.\frac{1}{x}=\frac{x}{2}$$

$$I=\int_1^2\frac{x}{2}\sqrt{1+x^2}dx=\int_1^2 2.\frac{x}{2}\sqrt{1+x^2}.\frac{1}{2}$$

$$I=\frac{1}{4}[\frac{2}{3}\sqrt{(1+x^2)^3}]_1^2=\frac{1}{6}\left((5)^{\frac{3}{2}}-(2)^{\frac{3}{2}}\right)=\frac{1}{6}(11,1-2,82)=1,3$$

$$I=\int_\Gamma 4sin4tdl$$

حيث أن $0\leq t\leq\frac{\pi}{4}$ و

$$\Gamma\equiv x=sin^2t\ ,\qquad y=cos^2t\ ,\qquad z=t$$

$x'_t=2costsint$ $\qquad dl=\sqrt{x'^2_t+y'^2_t+z'^2_t}$

$y'_t=-2sintcost$

$z'_t=1$

$$\Rightarrow\ =\sqrt{4cos^2tsin^2t+4cos^2tsin^2t+1}$$

$$=\sqrt{8cos^2tsin^2t+1}$$

$$\mathrm{I}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}4sint\sqrt{8\cos^2t\sin^2t+1}\,\mathrm{dt}\quad(*)$$

$$8cos^2tsin^2t+1=2.(2cost.sint)^2+1$$

$$=2.sin^22t+1\ =1-cos4t+1$$

نعوض في (*) $$8\cos^2 t\sin^2 t + 1 = 2 - cos4t$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4sint\sqrt{2 - cos4t}dt \qquad (**)$$

لكن $$(-cos4t)' = 4sin4t$$

نعوض في (**)

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2 - cos4t)\sqrt{2 - cos4t}dt$$

$$I = \frac{3}{2}\left[\sqrt{(2 - cos4t)^3}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$I = \frac{2}{3}\left[(2+1)^{\frac{3}{2}} - (2-1)^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{2}{3}\left((3)^{\frac{3}{2}} - 1\right) = 2,79$$

15) اكتب قيمة التكامل الخطي $I = \int_\Gamma (x+y)dl$

حيث Γ $C(1,0)$ $B(0,1)$ $O(0,0)$

الحل : لحل هذا التكامل نجزء المثلث الى ثلاث قطع مستقيمة نكامل كل منها على حدة

ويحسب التكامل النهائي من مجموع هذه التكاملات الثلاثة

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

لحل هذا التكامل نحول **oB** للإحداثيات الوسيطية

من القانون

$$\frac{x - x_i}{x_0 - x_B} = \frac{y - y_i}{y_0 - y_B} = t$$

حيث (y_i, x_i) هي إحداثيات إحدى النقطتين $(0, B)$

أي

$$\frac{x-0}{0} = \frac{y-0}{1} = t \leftrightarrow x = 0 \,, \qquad y = t \to dy = dt$$

لإيجاد حدود التكامل نعوض احداثيات النقطية **OB**في الإحداثيات الوسيطية

$$y = 1 \leftrightarrow t = 1 \;, \qquad y = 0 \leftrightarrow t = 0$$

نحسب ال $d(l)$

$$d(l) = \sqrt{0+1} = 1$$

$$I_1 = \int_0^1 t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

ملاحظة 2 : ان القطعة المستقيمة**oc** تساوي القطعة المستقيمة **oB** أي يمكننا ان نقول

$$I_2 = I_1$$

لحساب I_3 نفس الطريقة السابقة المتبعة

$$I_3 = \int_{Bi} (x+y)\,dy$$

$$\frac{x - x_B}{x_A - x_B} = \frac{y - y_B}{y_A - y_B} = t$$

$$\frac{x-0}{1} = \frac{y-1}{-1} = t \leftrightarrow x = t\,, \qquad y = 1 - t \rightarrow dy = -dt$$

لحساب حدود التكامل نعوض **t**في كلا من **x,y** في النقطتين **a,b**

$$x = t \rightarrow (1,0) \rightarrow t = 1$$
$$y = 1 - t \rightarrow 0 = 1 - t \rightarrow t = 1$$

$$x = t \rightarrow B(0,1) \rightarrow t = 0$$
$$y = 1 - t \rightarrow 1 - t = 1 \rightarrow t = 0$$

$$d(l) = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$I = \int_0^1 (t + 1 - t)\sqrt{2}\,dt = \sqrt{2}\int_0^1 (1)\,dt = \sqrt{2}[t]_0^1 = \sqrt{2}$$

$$I = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \sqrt{2} = 1 + \sqrt{2}$$

احسب قيمة التكامل الثلاثي:

$$I = \iiint_D \frac{dxdydz}{x^2 + y^2 + z^2 + 1}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\theta d\theta \int_0^{\infty} \frac{r^2 dr}{(r^2+1)^2}$$

نكامل مباشرة:

$$I = \frac{\pi}{2}.1.\int_0^{\infty} \frac{r^2 dr}{(r^2+1)^2}$$

وبتفريق الكسور:

$$\frac{r^2}{(r^2+1)^2} = \frac{Ar + a}{r^2 + 1} + \frac{Br + b}{(r^2+1)^2}$$

$$A = 0, a = 1, B = 0, b = -1$$

بالتعويض:

$$\int \frac{r^2}{(r^2+1)^2} = \int \left(\frac{1}{r^2+1} - \frac{1}{(r^2+1)^2}\right) dr$$

باستخدام التكامل بالتعويض:

$$\int \frac{dr}{(r^2+1)^2} \leftrightarrow dr = (tg^2u + 1)du \leftrightarrow r = tgu \leftrightarrow \frac{dr}{r^2+1} = du$$

نعوض في التكامل:

$$\int \frac{r^2}{(r^2+1)^2} = \int \frac{du}{r^2+1} = \int \frac{du}{tg^2u+1}$$

$$tg^2u + 1 = \frac{sin^2u}{cos^2u} + 1 = \frac{sin^2u + cos^2u}{cos^2u} = \frac{1}{cos^2u}$$

$$\leftrightarrow \frac{1}{tg^2u + 1} = cos^2u$$

$$I = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{cos2u}{2}\right) du = (\frac{1}{2}u + \frac{sin2u}{4})$$

بالنسبة لحدود التكامل نعوض حدود التكامل في العلاقة $r = tgu$

$$tgu = 0 \leftrightarrow u = 0$$

$$\infty = tgu \leftrightarrow u = \frac{\pi}{2}$$

بالتعويض نجد:

$$\left[\frac{1}{2}u + \frac{sin2u}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

$$\int \frac{dr}{(r^2+1)^2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\int \frac{dr}{(r^2+1)^2} = [arctg]_0^{\infty} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$I = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$I = \frac{\pi}{2}.\frac{\pi}{2}.1 = \frac{\pi^2}{4}$$

11)احسب قيمة التكامل التالي:

$$I = \iiint_D xy\sqrt{z}dxdydz$$

$$D \equiv \begin{cases} y = 1 \\ y = z \\ y = x^2 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$I = \int_{x=-1}^{x=1} xdx \int_{x^2}^{1} ydy \int_{z=0}^{z=y} \sqrt{z}dz$$

$$I_1=\int_0^y \sqrt{z}dz=\left[\frac{2}{3}\sqrt{z^3}\right]_0^y=\frac{2}{3}\sqrt{y^3}$$

$$I_2=\frac{2}{3}\int_{y=x^2}^{y=1}\sqrt{y^5}dy=\left[\frac{2}{3}.\frac{2}{7}.y^{\frac{7}{2}}\right]_{x^2}^{1}=\frac{4}{21}-\frac{4}{21}x^7=\frac{4}{21}(1-x^7)$$

$$I=\frac{4}{21}\int_{-1}^{1}x(1-x^7)dx=\frac{4}{21}\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^9}{9}\right]_{-1}^{1}$$

$$=\frac{4}{21}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{9}-\frac{1}{2}-\frac{1}{9}\right)=-\frac{8}{189}$$

ملاحظة: إنَّ هذه الحلول هي جهد شخصي من فريق الكريات الحمراء التطوعي RBCs ولا علاقة للدكتور بها. ودمتم بألف خير ^_^